TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 333, Number 1, September 1992

RÉSOLVANT GÉNÉRALISÉ ET SÉPARATION DES POINTS SINGULIERS QUASI-FREDHOLM

J. PH. LABROUSSE ET M. MBEKHTA

RESUMÉ. C. Apostol et K. Clancey (Trans. Amer. Math. Soc. **215** (1976), 293–300), ont introduit la notion de "projection spectrale généralisée". Cette notion permet, en particulier, de séparer les ensembles finis de points singuliers dans le domaine semi-Fredholm $(\rho_{s\phi}(A))$ d'un opérateur A borné dans un Hilbert H. Dans ce travail, on se propose de généraliser ce résultat au domaine quasi-Fredholm de A $(\rho_{q\phi}(A))$, et pour cela, nous donnons une nouvelle représentation triangulaire du type d'Apostol. D'autre part on construit, pour un opérateur fermé à domaine dense dans H, un résolvant généralisé vérifiant l'identité de la résolvante et analytique dans le domaine régulier de Fredholm de A $(\rho_\phi^r(A))$ sauf éventuellement sur un ensemble au plus dénombrable de points situés prés de la frontière de $\rho_\phi(A)$.

1. PRÉLIMINAIRES

Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur fermé de domaine $D(A)$ et d'image $R(A)$ dans H. On note $N(A)$, $\sigma(A)$ et $\rho(A)$ respectivement le noyau, le spectre et l'ensemble résolvant de A.

Soit $\mathscr{U}$ une partie de $\mathbb{C}$; on dira que A admet un opérateur résolvant (ou inverse) généralisé $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ dans $\mathscr{U}$ si $\forall\lambda \in \mathscr{U}$, $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est un opérateur borné de H dans $D(A)$ tel que:

$$(A-\lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A-\lambda I) = (A-\lambda I) \quad \text{et} \quad \mathrm{Rg}(A, \lambda)(A-\lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda) = \mathrm{Rg}(A, \lambda).$$

Remarques. (1) En général $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ n'est pas unique. Si toutefois $\lambda \in \rho(A)$, alors $\mathrm{Rg}(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ l'opérateur résolvant habituel.

(2) Si on note $P_\lambda = (A - \lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ et $Q_\lambda = \mathrm{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)$ alors P_λ et Q_λ sont des projections telles que $R(P_\lambda) = R(A - \lambda I)$ et $N(Q_\lambda) = N(A - \lambda I)$.

On dira que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ vérifie l'identité de la résolvante dans $\mathscr{U}$ si $\forall\lambda$, μ appartenant à une même composante connexe de $\mathscr{U}$

$$\mathrm{Rg}(A, \lambda) - \mathrm{Rg}(A, \mu) = (\lambda - \mu)\mathrm{Rg}(A, \lambda)\mathrm{Rg}(A, \mu).$$

Dans [7, 9, 10 et 11] on trouve une généralisation de $\rho(A)$ où la notion d'inverse est remplacée par celle d'inverse généralisé. Notons $\mathrm{reg}(A)$ l'ensemble

Received by the editors November 13, 1989 and, in revised form, June 5, 1990.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 47A53, 47B05.

Key words and phrases. Opérateurs de Fredholm, quasi-Fredholm, résolvant généralisé, spectre généralisé.

régulier (ou l'ensemble résolvant généralisé) de A, défini par:

$$\operatorname{reg}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ A \text{ admet un opérateur résolvant généralisé analytique dans un voisinage } \mathscr{U} \text{ de } \lambda\}.$$

Il est clair que $\operatorname{reg}(A)$ est ouvert et $\rho(A) \subseteq \operatorname{reg}(A)$. Le spectre généralisé $\sigma_g(A)$ (complément de $\operatorname{reg}(A)$ dans $\mathbb{C}$), possède des propriétés analogues à celles de $\sigma(A)$ dans la théorie spectrale classique (cf. [10, 11]).

Enfin, on dira que A est régulier si $R(A)$ est fermé et $\forall n \geq 0$, $N(A^n) \subseteq R(A)$.

Théorème 1.1. *Soit A un opérateur fermé avec $D(A)$ dense alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) $\lambda_0 \in \operatorname{reg}(A)$,

(ii) *$A - \lambda_0 I$ est régulier,*

(iii) *$R(A - \lambda_0 I)$ est fermé dans H et l'application $\lambda \mapsto P_{R(A-\lambda I)}$ est continue en λ_0.*

(iv) *$R(A - \lambda_0 I)$ fermé dans H et l'application $\lambda \mapsto P_{N(A-\lambda I)}$ est continue en λ_0 (où P_M est la projection orthogonale sur M).*

(v) *$c(A - \lambda_0 I) > 0$ et l'application $\lambda \mapsto c(A - \lambda I)$ est continue en λ_0, où $c(A)$ est la conorme de A définie par*

$$c(A) = \inf\{\|Au\|\,;\ u \in D(A) \cap N(A)^{\perp} \text{ et } \|u\| = 1\} \quad (\textit{cf.}\ [6])$$

(vi) $\overline{\lambda}_0 \in \operatorname{reg}(A^*)$.

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Voir [9, Théorème 2.6].

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) Voir [11, Théorème 2.1].

(i) $\Leftrightarrow$ (vi) Voir [7, Corollaire 4.1.2].

On aura besoin aussi de la notion de coeur d'un opérateur qu'on note $\operatorname{Co}(A)$ par définition c'est le plus grand sous-espace M de H tel que $A(M \cap D(A)) = M$ (sur l'existence de $\operatorname{Co}(A)$ cf. [12]).

Proposition 1.2 [8]. *Si $0 \in \operatorname{reg}(A)$ alors*

(i) *$\operatorname{Co}(A - \lambda I)$ est constant dans la composante connexe Ω_0 de $\operatorname{reg}(A)$ contenant zéro. En plus on a*

$$\operatorname{Co}(A) = \bigcap_{n \geq 0} R(A^n) = \bigcap_{j \geq 0} R(A - \lambda_j I)$$

où $\{\lambda_j\}$ est une suite de points, tous distincts, de Ω_0 qui converge vers zéro.

(ii) *$H_0(A) \subseteq \operatorname{Co}(A) = H_0(A^*)^{\perp}$ où $H_0(A) = \{u \in D(A^{\infty})\,;\ \lim_{n\to\infty} \|A^n u\|^{1/n} = 0\}$.*

Corollaire 1.3. *Soit A un opérateur fermé avec $D(A)$ dense dans H et tel que $0 \in \operatorname{reg}(A)$ alors*

$$\text{si } \operatorname{codim}(\operatorname{Co}(A)) = m < \infty \text{ alors } m = 0.$$

Démonstration. Supposons que $\operatorname{codim}(\operatorname{Co}(A)) = m$; alors $m = \dim(\operatorname{Co}(A)^{\perp}) \geq \dim(H_0(A^*))$. La dimension de $H_0(A^*)$ étant finie, $H_0(A^*)$ est fermé et comme A^* est régulier on en déduit que $H_0(A^*) = \{0\}$ (cf. [9, Théorème 2.11]) et par conséquent que $R(A) = H = \operatorname{Co}(A)$ ce qui montre que $m = 0$.

Proposition 1.4. *Soit A un opérateur fermé avec $D(A)$ dense dans H et $\mathscr{U}$ un ouvert connexe de $\operatorname{reg}(A)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes*

(a) *Il existe* E, F *sous-espaces fermés de* H *tels que*

$$\forall \lambda \in \mathscr{U} \quad R(A-\lambda I) \oplus F = N(A-\lambda I) \oplus E = H.$$

(b) A *admet un résolvant généralisé analytique et vérifiant l'identité de la résolvante dans* $\mathscr{U}$.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : on a $\forall \lambda \in \mathscr{U}$, $R(A-\lambda I)\oplus F = N(A-\lambda I)\oplus E = H$. Soit P_λ la projection sur $R(A-\lambda I)$ correspondant à la première décomposition et Q_λ la projection sur E correspondant à la deuxième décomposition.

Soit maintenant $u \in H$, alors $P_\lambda u \in R(A-\lambda I)$ et il existe $v \in D(A)$ tel que $(A-\lambda I)v = P_\lambda u$.

On posera par définition $\mathrm{Rg}(A, \lambda)u = Q_\lambda v \in D(A)$. Montrons que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est ainsi bien défini. En effet soit $w \in H$ tel que $(A-\lambda I)w = P_\lambda u$. Alors $v - w \in N(A-\lambda I)$ d'où $Q_\lambda(v-w) = 0$ ou encore $Q_\lambda v = Q_\lambda w$ ce qui montre que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ ne dépend pas du choix de v.

D'autre part on a $\forall v \in D(A)$ $(I-Q_\lambda)v \in N(A-\lambda I)$ et $(A-\lambda I)(I-Q_\lambda)v = 0$ donc

(1) $$(A-\lambda I)v = (A-\lambda I)Q_\lambda v$$

Posons $(A-\lambda I)v = u = P_\lambda u$; alors $\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A-\lambda I)v = \mathrm{Rg}(A, \lambda)u = Q_\lambda v$. Donc

(2) $$\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A-\lambda I) = Q_\lambda \quad \text{sur } D(A).$$

Si $u \in H$ avec $P_\lambda u = (A-\lambda I)v$ alors $(A-\lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)u = (A-\lambda I)Q_\lambda v = (A-\lambda I)v = P_\lambda u$. Donc

(3) $$(A-\lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda) = P_\lambda \quad \text{sur } H.$$

Montrons que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est un résolvant généralisé de A dans $\mathscr{U}$. Par défini-
tion, $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est à valeurs dans $D(A)$. Vérifions que

(4) $$(A-\lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A-\lambda I) = (A-\lambda I) \quad \text{sur } D(A).$$

En utilisant (1) et la définition de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ on a $\forall v \in D(A)$,

$$(A-\lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A-\lambda I)v = (A-\lambda I)Q_\lambda v = (A-\lambda I)v$$

et donc (4) est démontré.

Vérifions maintenant que

(5) $$\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A-\lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda) = \mathrm{Rg}(A, \lambda) \quad \text{sur } H.$$

Soit $u \in H$ avec $P_\lambda u = (A-\lambda I)v$, alors par définition de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ on a $\mathrm{Rg}(A, \lambda)u = Q_\lambda v$, et en appliquant (1) et (2) on obtient d'une part que $(A-\lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)u = (A-\lambda I)Q_\lambda v = (A-\lambda I)v$ et d'autre part, $\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A-\lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)u = \mathrm{Rg}(A, \lambda)(A-\lambda I)v = Q_\lambda v = \mathrm{Rg}(A, \lambda)u$ et (5) est démontré.

Finalement soit $u \in H$ et C un voisinage compact de λ dans $\mathscr{U}$. $P_\lambda u \in R(A-\lambda I)$ alors $\exists v \in D(A) \cap N(A-\lambda I)^\perp$ tel que $\|P_\lambda u\| = \|(A-\lambda I)v\| \geq c(A-\lambda I)\|v\|$. Donc

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Rg}(A, \lambda)u\| = \|Q_\lambda v\| \leq \|Q_\lambda\|\,\|v\| &\leq \|Q_\lambda\|[c(A-\lambda I)]^{-1}\|P_\lambda u\| \\ &\leq \|Q_\lambda\|\,\|P_\lambda\|[c(A-\lambda I)]^{-1}\|u\|.\end{aligned}$$

L'application $\lambda \mapsto c(A-\lambda I)$ est continue et strictement positive dans $\operatorname{reg}(A)$ (cf. Théorème 1.1(v)). Comme $C \subseteq \operatorname{reg}(A)$ est compact, on déduit que l'application $\lambda \mapsto [c(A-\lambda I)]^{-1}$ admet un maximum dans C. De même les applications $\lambda \mapsto Q_\lambda$ et $\lambda \mapsto P_\lambda$ sont continues dans $\operatorname{reg}(A)$, et on en déduit qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall \lambda \in C$, $\|\mathrm{Rg}(A, \lambda)u\| \leq M\|u\|$. Donc $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est un opérateur continu.

Montrons maintenant que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ vérifie l'identité de la résolvante dans $\mathscr{U}$. Remarquons d'abord que si λ, $\mu \in \mathscr{U}$ alors $(I - P_\mu)(I - P_\lambda) = (I - P_\lambda)$ (d'où $P_\mu P_\lambda = P_\mu$) et $Q_\mu Q_\lambda = Q_\lambda$.

Soit $u \in H$ et $\lambda, \mu \in \mathscr{U}$, en utilisant (2) et (3) on a:

$$\begin{aligned}\mathrm{Rg}(A, \lambda)u - \mathrm{Rg}(A, \mu)u &= Q_\mu \mathrm{Rg}(A, \lambda)u - \mathrm{Rg}(A, \mu)P_\lambda u \\ &= \mathrm{Rg}(A, \mu)(A - \mu I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)u - \mathrm{Rg}(A, \mu)(A - \lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)u \\ &= (\lambda - \mu)\mathrm{Rg}(A, \mu)\mathrm{Rg}(A, \lambda)u.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{Rg}(A, \lambda) - \mathrm{Rg}(A, \mu) = (\lambda - \mu)\mathrm{Rg}(A, \mu)\mathrm{Rg}(A, \lambda).$$

En passant à la limite pour $\mu \to \lambda$ on voit que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est continue en λ. Donc en divisant les deux termes de l'égalité ci-dessus par $\lambda - \mu$ et en passant à la limite pour $\mu \to \lambda$ on trouve:

$$(\mathrm{Rg}(A, \lambda))' = (\mathrm{Rg}(A, \lambda))^2$$

formule qui généralise la formule bien connue pour la dérivée de l'opérateur résolvant habituel et qui établit que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est analytique dans $\mathscr{U}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) : On a $\forall \lambda$, $\mu \in \mathscr{U}$,

$$\mathrm{Rg}(A, \lambda) - \mathrm{Rg}(A, \mu) = (\lambda - \mu)\mathrm{Rg}(A, \lambda)\mathrm{Rg}(A, \mu) \tag{6}$$

et

$$\mathrm{Rg}(A, \mu) - \mathrm{Rg}(A, \lambda) = (\mu - \lambda)\mathrm{Rg}(A, \mu)\mathrm{Rg}(A, \lambda)$$

D'où

$$-(\mathrm{Rg}(A, \lambda) - \mathrm{Rg}(A, \mu)) = -(\lambda - \mu)\mathrm{Rg}(A, \mu)\mathrm{Rg}(A, \lambda).$$

De la première et la dernière égalité on déduit que

$$\mathrm{Rg}(A, \lambda)\mathrm{Rg}(A, \mu) = \mathrm{Rg}(A, \mu)\mathrm{Rg}(A, \lambda). \tag{7}$$

Montrons que le noyau de $\mathrm{Rg}(A, \lambda))$ est constant par rapport à λ. En effet, soit $\lambda, \mu \in \mathscr{U}$ et $u \in N(\mathrm{Rg}(A, \lambda))$ alors

$$\mathrm{Rg}(A, \mu)u = -(\lambda - \mu)\mathrm{Rg}(A, \mu)\mathrm{Rg}(A, \lambda)u + \mathrm{Rg}(A, \lambda)u = 0$$

donc $N(\mathrm{Rg}(A, \lambda)) \subseteq N(\mathrm{Rg}(A, \mu))$. En interchangeant λ et μ on obtient l'autre inclusion et par conséquent $N(\mathrm{Rg}(A, \lambda)) = N(\mathrm{Rg}(A, \mu))$. On notera, E la valeur commune à tous les noyaux de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ pour $\lambda \in \mathscr{U}$.

Montrons que l'image de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est constante par rapport à λ. En effet, (6) et (7) impliquent que $\mathrm{Rg}(A, \lambda) = (\lambda - \mu)\mathrm{Rg}(A, \mu)\mathrm{Rg}(A, \lambda) + \mathrm{Rg}(A, \mu) = \mathrm{Rg}(A, \mu)[(\lambda - \mu)\mathrm{Rg}(A, \lambda) + I)]$. Ceci montre que l'image de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est inclue dans l'image de $\mathrm{Rg}(A, \mu)$. En interchangeant λ et μ on obtient l'autre inclusion. Soit F la valeur commune de toutes les adhérences des images de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ pour $\lambda \in \mathscr{U}$.

Soit $u \in H$ alors $u = [I - (A - \lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)]u + (A - \lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)u$ d'où $u \in N(\mathrm{Rg}(A, \lambda)) + R(A - \lambda I) = E + R(A - \lambda I)$ donc $H \subseteq E + R(A - \lambda I)$. Soit maintenant $u \in N(\mathrm{Rg}(A, \lambda)) \cap R(A-\lambda I)$ alors $u = (A-\lambda I)v$ et $\mathrm{Rg}(A, \lambda)u = \mathrm{Rg}(A, \lambda)(A-\lambda I)v = 0$ donc $(A-\lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A-\lambda I)v = 0$ et par conséquent $u = (A-\lambda I)v = 0$. Donc

$$H = R(A-\lambda I) \oplus N(\mathrm{Rg}(A, \lambda)) = R(A-\lambda I) \oplus E.$$

Finalement, comme $\mathrm{Rg}(A^*, \bar{\lambda}) = \mathrm{Rg}(A, \lambda)^*$ on voit que A^* satisfait les mêmes hypothèses que A et par conséquent que $\lambda \in \mathscr{U}$ implique que

$$H = R(A^*-\overline{\lambda I}) \oplus N(\mathrm{Rg}(A^*, \bar{\lambda})) = R(A^*-\overline{\lambda I})^{\perp} \oplus N(\mathrm{Rg}(A^*, \bar{\lambda}))^{\perp} = N(A-\lambda I) \oplus F$$

oú $F = N(\mathrm{Rg}(A^*, \bar{\lambda}))^{\perp} = R(\mathrm{Rg}(A, \lambda))$ ne dépend pas de λ.

2. Sur le résolvant généralisé dans le domaine de Fredholm

Dans ce paragraphe, on notera $\rho_\phi(A)$ l'ensemble résolvant de Fredholm, défini par

$$\rho_\phi(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, A-\lambda I \text{ est un opérateur de Fredholm}\}.$$

Notons aussi:

$$\rho_\phi^r(A) = \rho_\phi(A) \cap \mathrm{reg}(A), \qquad \rho_\phi^s(A) = \rho_\phi(A) \backslash \rho_\phi^r(A).$$

Remarque. $\rho_\phi^s(A)$ est dénombrable et n'admet pas de points d'accumulation dans $\rho_\phi(A)$ (cf. par exemple [7, Proposition 4.3.1(a)]).

Théorème 2.1. *Soit A un opérateur fermé avec $D(A)$ dense dans H et Ω une composante connexe de $\rho_\phi^r(A)$. Alors pour tout compact K de Ω il existe un résolvant généralisé de A vérifiant l'identité de la résolvante et analytique dans K.*

Remarque. Pour la démonstration de ce Théorème on aura besoin de quelques résultats préliminaires et sans perte de généralité on supposera que $0 \in K$.

En utilisant la Proposition 1.2(i), il est facile de voir que:

$$\mathrm{Co}(A) = \bigcap_{\{\lambda_i\} \subset K} R(A-\lambda_i I) \quad \text{où } \{\lambda_i\} \text{ est une suite infinie de points distincts.}$$

Lemme 2.2. *Si* $\mathrm{Co}(A) \neq H$ *alors* $\exists f_A \in D(A)$ *tel que* $\forall \lambda \in K$, $f_A \notin R(A-\lambda I)$. *Quand aucune confusion n'est possible on notera f_A simplement f.*

Démonstration. Comme $\mathrm{Co}(A) \neq H$ et $D(A)$ est dense dans H, on en déduit que $\exists u \in D(A)$ et $u \notin \mathrm{Co}(A)$ avec $u \neq 0$.

Posons

$$\Delta = \{\lambda \in K\,;\, \exists n(\lambda) \geq 1\,,\ u \in R(A-\lambda I)^{n(\lambda)} \text{ et } u \notin R(A-\lambda I)^{n(\lambda)+1}\}.$$

Si $\Delta = \varnothing$ alors on prend $f = u$. Supposons que $\Delta \neq \varnothing$ et montrons que Δ est fini. Si Δ est infini alors il existe $\{\lambda_i\} \subset \Delta \subset K$, une suite infinie et d'après la remarque précédente on en déduit que $u \in \mathrm{Co}(A)$ ce qui contredit le fait que $u \notin \mathrm{Co}(A)$. Donc si $u \in \bigcap_{\lambda\in\Delta} R(A-\lambda I)^{n(\lambda)}$, $\exists w \in D(A)$ tel que $u = \prod_{\lambda\in\Delta}(A-\lambda I)^{n(\lambda)}w$ et $\forall \lambda \in K$, $w \notin R(A-\lambda I)$. Il suffit maintenant de prendre $f = w$.

Remarque. $\forall \lambda \in K$, $R(A-\lambda I) \oplus \{f\}$ est fermé, où $\{f\}$ désigne l'espace engendré par f.

Lemme 2.3. *Posons*

$$C_1 = \bigcap_{\lambda \in K \setminus \{0\}} (R(A-\lambda I) \oplus \{f\}) \quad et \quad C_2 = \bigcap_{\lambda \in K} (R(A-\lambda I) \oplus \{f\}).$$

(i) $C_1 = C_2$ (*et tous deux seront notés* C),
(ii) $\forall u \in D(A) : u \in C_1 \Leftrightarrow Au \in C_1$.

Démonstration. (i) Evidemment il suffit de montrer que $C_1 \subseteq C_2$. Soit $u \in C_1$ et $\{\lambda_i\} \subset K$ une suite qui converge vers 0. $\forall i \in \mathbb{N}$, soit P_i la projection orthogonale sur $R(A-\lambda_i I)+\{f\}$ et P_0 la projection orthogonale sur $R(A)+\{f\}$. Alors, d'après le Corollaire 1.3.5 de [7], (en prenant $N^{\perp} = \{f\}$, $M = R(A)$, $M' = R(A-\lambda_i I)$) et le Théorème 1.1(iii), $\lim_{i\to\infty} P_i = P_0$. Donc comme $\forall i \in \mathbb{N}$, $u = P_i u$ on $a: u = \lim_{i\to\infty} P_i u = P_0 u$ d'où $u \in C_2$.

(ii) $(\Rightarrow)$. Soit $u \in C$. Alors $\forall \lambda \in K$ $u = (A-\lambda I)v + \alpha f$. Comme u et $f \in D(A)$ alors $(A-\lambda I)v \in D(A)$ d'où $v \in D(A^2)$. Donc $Au = (A-\lambda I)Av + \alpha Af = (A-\lambda I)(Av + \alpha f) + \alpha\lambda f \in R(A-\lambda I) \oplus \{f\}$ pour tout λ dans K, et par conséquent $Au \in C$.

$(\Leftarrow)$ Si $Au \in C$ alors $\forall \lambda \in K\setminus\{0\}$, $\exists v$, α tels que $Au = (A-\lambda I + \lambda I)u = (A-\lambda I)v + \alpha f$. Donc $u = (A-\lambda I)(\lambda^{-1}(v-u)) + \alpha\lambda^{-1} f$ et par conséquent $u \in C_1 = C$.

Corollaire 2.4.

$$\forall \lambda \in K, \qquad (A-\lambda I)u \in C \Leftrightarrow u \in C.$$

Démonstration. Evidente.

Soit P' la projection orthogonale sur C et $a \notin K$ (de sorte que $\forall \lambda \in K$, $a - \lambda \neq 0$). Posons: $D(A') = D(A) + C$; $\forall u \in D(A')$, $u = v + w$ $(v \in D(A)$, $w \in C)$ $A'u = (I-P')Av + aP'u$.

Proposition 2.5. (i) *A' est bien défini, linéaire et fermé,*
(ii) $\mathrm{Co}(A') = C$ *et* $K \subseteq \mathrm{reg}(A')$.

Démonstration. (i) Soit $u \in D(A')$, avec $u = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$. Alors

$$(I-P')Av_1 - (I-P')Av_2 = (I-P')A(v_1 - v_2).$$

Or $v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in D(A) \cap C$ et par conséquent le Lemme 2.3 entraîne que $(I-P')A(v_1 - v_2) = 0$. Donc A' est bien défini. La linéarité de A' est une conséquence immédiate de celle de A.

(ii) Montrons maintenant que

$$\forall \lambda \in K, \qquad R(A'-\lambda I) = R(A-\lambda I) \oplus \{f\}. \tag{1}$$

Remarquons d'abord que si $u \in D(A')$, avec $u = v + w$ alors: $(A'-\lambda I)u = (I-P')(A-\lambda I)v + (a-\lambda)P'u$ car $(I-P')v = (I-P')u$. Donc $(A'-\lambda I)u \in R(A-\lambda I) + C \subseteq R(A-\lambda I) \oplus \{f\}$. Inversement, soit $v \in D(A)$; posons

$$u = (a-\lambda)^{-1}P'(A-\lambda I)v + (I-P')v = v + (a-\lambda)^{-1}P'(A-\lambda I)v - P'v.$$

Alors $u \in D(A')$ et $(A'-\lambda I)u = (I-P')(A-\lambda I)v + P'(A-\lambda I)v = (A-\lambda I)v$. Par conséquent $R(A-\lambda I) \subseteq R(A'-\lambda I)$. Enfin $f = (a-\lambda)^{-1}(A'-\lambda I)f \in R(A'-\lambda I)$ d'où $\{f\} \subseteq R(A'-\lambda I)$. Donc: $R(A-\lambda I) \oplus \{f\} \subseteq R(A'-\lambda I)$ et (1) est démontré. On en déduit en particulier que $\forall \lambda \in K$, $R(A'-\lambda I)$ est fermé. Montrons maintenant que

$$\forall \lambda \in K, \qquad N(A'-\lambda I) = \{0\}. \tag{2}$$

En effet, soit $u \in N(A'-\lambda I)$, $u = v+w$. Alors $(I-P')(A-\lambda I)v+(a-\lambda)P'u = 0$ d'où $(I-P')(A-\lambda I)v = 0$ et $P'u = 0$. Donc $(A-\lambda I)v \in C$, d'après le Corollaire 2.4, $v \in C$ et $P'v = v$. Par conséquent $0 = P'u = P'v + P'w = v + w = u$, ce qui établit (2).

(1) et (2) entraînent d'une part que $K \subseteq \operatorname{reg}(A')$, et d'autre part que A' est fermé (cf. [7, Proposition 2.2.3]). Donc (i) est démontré.

En outre (1) et $K \subseteq \operatorname{reg}(A')$ impliquent que $\operatorname{Co}(A') = C$ et (ii) est démontré.

Remarque. $\operatorname{codim}(R(A')) = \operatorname{codim}(R(A)) - 1$.

Proposition 2.6. *Sous les hypothèses du Théorème* 2.1, *il existe* F *et* E *deux sous-espaces fermés de* H *tels que* $\forall\lambda \in K$,

$$R(A-\lambda I) \oplus F = H \quad et \quad N(A-\lambda I) \oplus E = H.$$

Démonstration. Posons $n = \operatorname{codim}(R(A))$.

Si $n = 1$ alors on prend $F = \{f_A\}$, où f_A est le vecteur introduit dans le Lemme 2.2.

Si $n > 1$ on définit inductivement une suite $\{A_n\}$ d'opérateurs et une suite $\{u_n\}$ de vecteurs de la manière suivante (les notations sont celles du Lemme 2.2 et de la Proposition 2.4):

$$A_0 = A, \quad A_{j+1} = (A_j)' \quad \text{et} \quad u_{j+1} = f_{A_j}, \qquad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

On prends alors $F = \operatorname{clm}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. D'après la Remarque précédente, $\operatorname{codim}(R(A-\lambda I) + F) = n - n = 0$, donc $R(A-\lambda I) + F = H$ et comme $R(A-\lambda I) \cap F = \{0\}$ alors $R(A-\lambda I) \oplus F = H$. De même, d'après [7, Proposition 3.35] on voit que $\rho_\phi^r(A^*) = \{\lambda ; \bar{\lambda} \in \rho_\phi^r(A)\}$. On procède donc comme ci-dessus à partir de A^* et on obtient G^* tel que $R(A^* - \overline{\lambda I}) \oplus G^* = H$. On prend alors $E = (G^*)^\perp$ et la proposition est démontrée.

Démonstration du Théorème 2.1. Conséquense directe des Propositions (2.6) et (1.4).

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\mathscr{U}$ une composante connexe de $\rho_\phi(A)$. Posons:

$$C_\varepsilon = \{\lambda \in \rho_\phi(A) ;\ \operatorname{dist}(\lambda, \sigma_\phi(A)) \geq \varepsilon \text{ et } |\lambda| \leq 1/\varepsilon\}$$

où $\sigma_\phi(A) = \mathbb{C} \backslash \rho_\phi(A)$, spectre essentiel de A.

Remarque. $\forall\varepsilon > 0$, C_ε est compact et $\forall K$, compact contenu dans $\mathscr{U}$, $\exists\varepsilon > 0$ tel que $K \subseteq C_\varepsilon$.

Dorénavant, pour tout opérateur A, B, etc., et tout sous-espace M, N, etc. ... de H notons A_M, B_N, etc. ... respectivement la restriction de A à M, de B à N, etc. ...

Proposition 2.7. $\forall\varepsilon > 0$ *il existe un résolvant généralisé de* A *vérifiant l'identité de la résolvante et méromorphe dans* $\mathscr{U}$ *sauf éventuellement sur un ensemble dénombrable* X *de points situés à une distance inférieure à* ε *de la frontière de* $\mathscr{U}$ *ou de norme* $\geq 1/\varepsilon$ (*si* $\mathscr{U}$ *est bornée cette dernière condition peut être éliminée*). *En outre les projections* P_λ *et* Q_λ *associées au résolvant généralisé sont continues partout dans* $\mathscr{U}$ *sauf éventuellement sur* X.

Démonstration. Posons $K = C_\varepsilon$. Alors $K \cap [\mathscr{U} \backslash \operatorname{reg}(A)]$ est un ensemble fini (puisque les λ tels que $A - \lambda I$ est de Fredholm et n'est pas régulier sont des points isolés). Notons $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ cet ensemble. Alors (cf. Proposition

5.1.2 de [7]) H est la somme directe finie de $n+1$ sous-espaces invariants $N_0, N_1, \ldots, N_n$ tels que: $(A-\lambda I)_{N_0}$ est régulier $\forall\lambda \in K$; $(A-\lambda_j)I_{N_j}$ est nilpotent pour $j=1, 2, \ldots, n$ et notons T_j $(0 \leq j \leq n)$ les projections de H sur N_j correspondant à cette décomposition.

Enfin soit $\mathrm{Rg}(A_0, \lambda)$ le résolvant généralisé associé à $(A-\lambda I)_{N_0}$, analytique dans $\mathscr{U}$ sauf éventuellement sur un ensemble dénombrable X, dont l'existence découle du Théorème 2.1. Alors d étant le degré de la décomposition de Kato associée à $A-\lambda_j I$ on pose:

$$R_j(A, \lambda) = -\frac{1}{\lambda-\lambda_j}\sum_{i=0}^{d-1}\left(\frac{A-\lambda_j}{\lambda-\lambda_j}\right)^i,$$

$$\mathrm{Rg}(A, \lambda) = \mathrm{Rg}(A_0, \lambda)T_0 + \sum_{j=1}^{n} R_j(A, \lambda)T_j$$

et on vérifie sans peine que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ répond à toutes les conditions du théorème et que les projections P_λ et Q_λ qui lui sont associées sont continues sur $\mathscr{U}\backslash X$.

Corollaire 2.8. *Soit A an opérateur fermé avec $D(A)$ dense dans H et $\varepsilon > 0$. Alors il existe un résolvant généralisé de A vérifiant l'identité de la résolvante et analytique dans $\rho_\phi^r(A)$, méromorphe dans $\rho_\phi(A)$, sauf éventuellement sur un ensemble dénombrable de points situés à une distance inférieure à ε de la frontière de $\rho_\phi(A)$ ou de norme $\geq 1/\varepsilon$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente: il suffit de construire le résolvant généralisé séparément sur chaque composante connexe.

Remarque. Ce dernier corollaire est une généralisation de [5, Theorem 1] au cas des opérateurs fermés à domaine dense.

3. Compléments sur les opérateurs quasi-Fredholm

Les opérateurs quasi-Freholm ont été introduits par dans [7], comme une généralisation des opérateurs semi-Fredholm. Dans ce travail on n'aura besoin que d'une de leurs caractérisations: Si A est fermé avec un domaine dense alors il est quasi-Fredholm de degré d et on note $A \in q\Phi(d)$ si et seulement si il existe M et N deux sous-espaces fermés de H invariants par A, tels que:

(a) $H = M \oplus N$,
(b) $N \subseteq D(A)$ et A_N est nilpotent de degré d,
(c) $0 \in \mathrm{reg}(A_M)$.

Le couple (M, N) est une décomposition de Kato de degré d associée à A.
Notons que $d = \inf\{n \in \mathbb{N};\ \forall m \geq n\colon R(A^m) \cap N(A) = R(A^n) \cap N(A)\}$.

Remarque. A est régulier $\Leftrightarrow A \in q\Phi(0)$. Dans la suite on notera $\rho_{q\phi}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \exists d \in \mathbb{N}$ tel que $A-\lambda I \in q\Phi(d)\}$, et $\rho_{q\phi}^s(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ A-\lambda I \in q\Phi(d)$ avec $d \geq 1\}$, alors: $\rho_{q\phi}(A) = \mathrm{reg}(A) \cup \rho_{q\phi}^s(A)$.

Avec les notations de [3 et 4] on trouve:

$$\rho_{\text{S-F}}(A) \subseteq \rho_{q\phi}(A), \quad \rho_{\text{S-F}}(A) \subseteq \rho_{q\phi}^s(A) \quad \text{et} \quad \rho_{\text{S-F}}^r(A) \subseteq \mathrm{reg}(A).$$

Proposition 3.1. (i) *$\rho_{q\phi}^s(A)$ est dénombrable et n'admet pas de points d'accumulation dans $\rho_{q\phi}(A)$.*

(ii) *Si $A \in q\Phi(d)$ alors $\mathrm{Co}(A) = \bigcap_{j\geq 0} R(A^j)$ est fermé.*

Démonstration. (i) Se déduit de [7, Proposition 4.3.1(a)].

(ii) On utilise la décomposition de Kato et la Proposition 1.2.

Proposition 3.2. *Soit A an opérateur fermé. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *A est quasi-Fredholm,*

(ii) $C(A) = \bigcap_{j\geq 0} R(A^j)$ *et* $H(A) = \bigcup_{j\geq 0} N(A^j)$ *sont fermés; alors*

$$\lim_{\lambda\to 0} P_{N(A-\lambda I)} = P_{N(A)\cap C(A)}; \quad \lim_{\lambda\to 0} P_{R(A-\lambda I)} = P_{R(A)+H(A)}.$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit A quasi-Fredholm et M, N une décomposition de Kato de degré d associée à. A. Il est facile de voir que si $\lambda \neq 0$ alors $N(A-\lambda I) \subseteq C(A)$ (dans ce cas $C(A) = \mathrm{Co}(A)$). Or, $\mathrm{Co}(A) \subseteq M$ d'où $N(A-\lambda I) = N((A-\lambda I)\cap M = N((A-\lambda I)_M)$. Donc $P_{N(A-\lambda I)} = P_{N((A-\lambda I)_M)}$ et comme $0 \in \mathrm{reg}(A_M) \Rightarrow \lambda \mapsto P_{N((A-\lambda I)_M)}$ est continue en zéro, on déduit que

$$\lim_{\lambda\to 0} P_{N(A-\lambda I)} = \lim_{\lambda\to 0} P_{N((A-\lambda I)_M)} = P_{N(A_M)} = P_{N(A)\cap \mathrm{Co}(A)}.$$

Montrons maintenant la deuxième condition de (2). Pour cela remarquons que

$$R(A) + \bigcup_{j\geq 0} N(A^j) = A(M\cap D(A)) \oplus N. \tag{1}$$

En effet, l'inclusion " $\supseteq$ " est évidente; montrons l'autre inclusion.

$$N \subseteq D(A) \Rightarrow R(A) = A(M\cap D(A)) \oplus A(N) \subseteq A(M\cap D(A)) \oplus N,$$

$$N \subseteq \bigcup_{j\geq 0} N(A^j) \Rightarrow \bigcup_{j\geq 0} N(A^j) = \bigcup_{j\geq 0} N(A^j)\cap M \oplus N = \bigcup_{j\geq 0} N((A_M)^j) \oplus N \tag{2}$$

et comme A_M est régulier $\Rightarrow \bigcup_{j\geq 0} N((A_M)^j) \subseteq R(A_M) = A(M\cap D(A))$, on en déduit que

$$\bigcup_{j\geq 0} N(A^j) \subseteq A(M\cap D(A)) \oplus N. \tag{3}$$

Or (2) et (3) $\Rightarrow$ (1). Par ailleurs si $\lambda \neq 0$ alors $R(A-\lambda I) = R((A-\lambda)I_M) \oplus N = (A-\lambda I)(M\cap D(A)) \oplus N$ donc $P_{R(A-\lambda I)} = P_{(A-\lambda I)(M\cap D(A))\oplus N}$ et comme $0 \in \mathrm{reg}(A_M) \Rightarrow \lambda \mapsto P_{R((A-\lambda I)_M)}$ est continue on zéro, on déduit que

$$\lim_{\lambda\to 0} P_{R(A-\lambda I)} = \lim_{\lambda\to 0} P_{R((A-\lambda I)_M)\oplus N} = P_{R(A_M)\oplus N}$$

en utilisant [7, Corollaire 1.3.5] et (1) permet de conclure.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sous hypothèse (ii) on en déduit que $N(A) \cap \bigcap_{j\geq 0} R(A^j)$ et $R(A) + \bigcup_{j\geq 0} N(A^j)$ sont fermés dans H. La Proposition 3.3.6 de [7] montre alors que A est quasi-Fredholm.

Théorème 3.3. *Soit A un opérateur fermé avec $D(A)$ dense dans H et tel que $A \in q\Phi(d)$ alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < \varepsilon$ on a:*

$$(\alpha) \quad \mathrm{Co}(A-\lambda I) + H_0(A-\lambda I) = \mathrm{Co}(A) + H_0(A).$$

$$(\beta) \quad \mathrm{Co}(A-\lambda I) \cap \overline{H_0(A-\lambda I)} = \mathrm{Co}(A) \cap \overline{H_0(A)}.$$

Démonstration. Soit $A \in q\Phi(d)$ et M, N une décomposition de Kato de degré d associée à A.

Montrons que

$$H_0(A) \cap M = H_0(A) \cap \mathrm{Co}(A). \tag{1}$$

En effet, $\mathrm{Co}(A) \subseteq M$ et $H_0(A_M) \subseteq \mathrm{Co}(A)$ (car A_M est régulier) impliquent que

$$\begin{aligned} H_0(A) \cap \mathrm{Co}(A) &= H_0(A) \cap M \cap \mathrm{Co}(A) = H_0(A_M) \cap \mathrm{Co}(A) \\ &= H_0(A_M) = H_0(A) \cap M. \end{aligned}$$

Montrons que

$$\mathrm{Co}(A) + H_0(A) = \mathrm{Co}(A) \oplus N. \tag{2}$$

En effet, $N \subseteq N(T^d) \subseteq H_0(A)$ et (1) impliquent d'une part $\mathrm{Co}(A) + N \subseteq \mathrm{Co}(A) + H_0(A)$ et d'autre part

$$H_0(A) = H_0(A) \cap M \oplus N = H_0(A) \cap \mathrm{Co}(A) \oplus N \subseteq \mathrm{Co}(A) \oplus N$$

d'où $\mathrm{Co}(A) + H_0(A) \subseteq \mathrm{Co}(A) \oplus N$ et par conséquent (2) est démontré.

(3) $\quad A_N$ nilpotent implique que $\forall \lambda \neq 0 \quad (A - \lambda I)_N$ est inversible

$$\mathrm{reg}(A_M) \text{ est ouvert donc } \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \lambda \in \mathrm{C},$$
$$|\lambda| < \varepsilon \Rightarrow 0 \in \mathrm{reg}((A - \lambda I)_M);$$

donc d'après le Théorème 1.1 on a:

$$\mathrm{Co}((A - \lambda I)_M) = \mathrm{Co}(A_M) = \mathrm{Co}(A). \tag{4}$$

On outre, $\forall \lambda \neq 0 \ (A - \lambda I)_N$ est inversible, d'où $\forall \lambda \in \mathrm{C}$, $0 < |\lambda| < \varepsilon \Rightarrow 0 \in \mathrm{reg}(A - \lambda I)$. Par conséquent, $H_0(A - \lambda I) \subseteq \mathrm{Co}(A - \lambda I)$ et (3) impliquent en particulier que $(A - \lambda I)(N) = N$. Donc $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $0 < |\lambda| < \varepsilon$ implique que

$$\begin{aligned} H_0(A - \lambda I) + \mathrm{Co}(A - \lambda I) &= \mathrm{Co}(A - \lambda I) \\ &= \mathrm{Co}(A - \lambda I) \cap M + N = \mathrm{Co}(A) + N = \mathrm{Co}(A) + H_0(A). \end{aligned}$$

D'où finalement $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $0 < |\lambda| < \varepsilon \Rightarrow H_0(A - \lambda I) + \mathrm{Co}(A - \lambda I) = \mathrm{Co}(A) + H_0(A)$; d'où (α) est démontré. Pour démontrer (β) on remarque que $A \in q\phi(d) \Leftrightarrow A^* \in q\phi(d)$ (cf. [7, Proposition 3.3.5]). Alors $\mathrm{Co}(A^* - \overline{\lambda I}) + H_0(A^* - \overline{\lambda I}) = \mathrm{Co}(A^*) + H_0(A^*)$ et on déduit (β) de la Proposition 1.2(ii) en y remplaçant A par A^*.

Corollaire 3.4. *Soit A un opérateur fermé avec $D(A)$ dense dans H. Alors les applications*

$$\lambda \mapsto \mathrm{Co}(A - \lambda I) + H_0(A - \lambda I), \quad \lambda \mapsto \mathrm{Co}(A - \lambda I) \cap \overline{H_0(A - \lambda I)}$$

sont constantes dans chaque composante connexe du domaine quasi-Fredholm $(\rho_{q\phi}(A))$ de A.

Remarque. L'application $\lambda \mapsto \mathrm{Co}(A - \lambda I) + \overline{H_0(A - \lambda I)}$ est constante dans chaque composante connexe du domaine quasi-Fredholm $(\rho_{q\phi}(A))$ de A.

En effet dans la démonstration du Théorème 3.3 on a montré (cf. (2)) que $\mathrm{Co}(A) + H_0(A) = \mathrm{Co}(A) \oplus N$.

Or, $\mathrm{Co}(A) \oplus N$ est fermé dans H; en effet $H = M \oplus N \Rightarrow H$ est isomorphe à $M \times N$ donc $\mathrm{Co}(A) \oplus N$ est isomorphe à $\mathrm{Co}(A) \times N$ qui est fermé dans $M \times N$

et par conséquent, $\mathrm{Co}(A)\oplus N$ est fermé dans H donc $\mathrm{Co}(A)+H_0(A)$ est fermé, par conséquent, $\mathrm{Co}(A-\lambda I)+H_0(A-\lambda I)$ est fermé dans chaque composantes connexe de $\rho_{q\phi}(A)$; donc, $\mathrm{Co}(A-\lambda I)+H_0(A-\lambda I)=\mathrm{Co}(A-\lambda I)+\overline{H_0(A-\lambda I)}$ pour tout $\lambda\in\rho_{q\phi}(A)$.

4. Triangularisation d'Apostol généralisée

Soit $B(H)$, l'espace des opérateurs bornés de H dans lui-même, et $T\in B(H)$. D'après la Proposition 1.2(i), $\mathrm{Co}(\lambda I-T)$ est constant dans chaque composante connexe de $\mathrm{reg}(T)$. Il est facile de voir que les composantes connexes de $\mathrm{reg}(T)$ constituent un ensemble dénombrable. Soit $S=\{\lambda_i\}$ l'ensemble obtenu en choisissant un et seul λ_i dans chaque composante connexe.

Alors

$$\bigcap_{\lambda\in\mathrm{reg}(T)}\mathrm{Co}(\lambda I-T)=\bigcap_{\lambda_i\in S}\mathrm{Co}(\lambda_i I-T).$$

Posons:

$$\widetilde{H}_r(T)=\left[\bigcap_{\lambda_i\in S}\mathrm{Co}(\lambda_i I-T)^*\right]^{\perp},\quad \widetilde{H}_l(T)=\left[\bigcap_{\lambda_i\in S}\mathrm{Co}(\lambda_i I-T)\right]^{\perp}.$$

On notera dans la suite $\widetilde{H}_r=\widetilde{H}_r(T)$ et $\widetilde{H}_l=\widetilde{H}_l(T)$.

Lemme 4.1. *Soit $T\in B(H)$ alors:*

(a) $\widetilde{H}_r=\mathrm{clm}\{N(\lambda I-T)\}_{\lambda\in\mathrm{reg}(T)}$,

(b) $\widetilde{H}_l=\mathrm{clm}\{N(\lambda I-T)^*\}_{\lambda\in\mathrm{reg}(T)}$.

Démonstration. (a) On a $\forall\lambda\in\mathrm{reg}(T)\bigcap_{\lambda_i\in S}\mathrm{Co}(\lambda_i I-T)^*\subseteq R(\lambda I-T)^*$ et comme $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, $N(\lambda I-T)=R(\lambda I-T)^{*\perp}$, on en déduit que

$$\forall\lambda\in\mathrm{reg}(T)\qquad N(\lambda I-T)=R(\lambda I-T)^{*\perp}\subseteq\left[\bigcap_{\lambda_i\in S}\mathrm{Co}(\lambda_i I-T)^*\right]^{\perp}=\widetilde{H}_r$$

d'où $\mathrm{clm}\{N(\lambda I-T)\}_{\lambda\in\mathrm{reg}(T)}\subseteq\widetilde{H}_r$.

Réciproquement, soit $u\perp\mathrm{clm}\{N(\lambda I-T\}_{\lambda\in\mathrm{reg}(T)}$, alors en particulier $\forall\lambda\in\mathrm{reg}(T)$ $u\perp N(\lambda I-T)$, donc $\forall\lambda\in\mathrm{reg}(T)$, $u\in R(\lambda I-T)^*$ par conséquent $u\in\bigcap_{\lambda\in\mathrm{reg}(T)}R(\lambda I-T)^*=\widetilde{H}_r^{\perp}$ d'où

$$[\mathrm{clm}\{N(\lambda I-T)\}_{\lambda\in\mathrm{reg}(T)}]^{\perp}\subseteq\widetilde{H}_r^{\perp}\Rightarrow\widetilde{H}_r\subseteq\mathrm{clm}\{N(\lambda I-T)\}_{\lambda\in\mathrm{reg}(T)}$$

donc (a) est démontré.

(b) Se démontre de la même façon que (a).

Lemme 4.2. $\lambda\in\mathrm{reg}(T)$ *alors* $N(\lambda I-T)^*\subseteq[\mathrm{clm}\{N(\mu I-T)\}_{\mu\in\mathbb{C}}]^{\perp}$.

Démonstration. On a $\forall\mu\neq\lambda\ N(\mu I-T)\subseteq R(\lambda I-T)$, d'autre part si $\lambda\in\mathrm{reg}(T)$ alors $N(\lambda I-T)\subseteq R(\lambda I-T)$. Par conséquent $\forall\mu\in\mathbb{C}$, $N(\mu I-T)\subseteq R(\lambda I-T)$ et comme $R(\lambda I-T)$ est fermé on en déduit que $\mathrm{clm}\{N(\mu I-T)\}_{\mu\in\mathbb{C}}\subseteq R(\lambda I-T)$, d'où

$$N(\lambda I-T)^*=R(\lambda I-T)^{\perp}\subseteq[\mathrm{clm}\{N(\mu I-T)\}_{\mu\in\mathbb{C}}]^{\perp}.$$

Lemma 4.3. $\widetilde{H}_r\perp\widetilde{H}_l$.

Démonstration. Les Lemmes 4.1 et 4.2 impliquent que $\forall\lambda\in\mathrm{reg}(T)N(\lambda I-T)^*\subseteq\widetilde{H}_r^{\perp}$ et donc $\widetilde{H}_l\subseteq\widetilde{H}_r^{\perp}$.

Remarque. $\widetilde{H}_r \oplus \widetilde{H}_l$ est fermé car c'est une somme orthogonale de sous-espaces fermés (Lemme 4.3).

Soit $\widetilde{H}_0 = [\widetilde{H}_r \oplus \widetilde{H}_l]^\perp$. Alors $H = \widetilde{H}_r \oplus \widetilde{H}_0 \oplus \widetilde{H}_l$.

$\widetilde{H}_r$ est invariant par T, on notera T_r la restriction de T à $\widetilde{H}_r$. En général $\widetilde{H}_0$ et $\widetilde{H}_l$ ne sont pas invariants par T, on définit T_0 et T_l comme des compressions c'est à dire $T_0 \in B(\widetilde{H}_0)$, si $u_0 \in \widetilde{H}_0$ alors $T_0 u_0 = P_0 T u_0$ où P_0 est la projection orthogonale sur $\widetilde{H}_0$. T_l est défini de la même faqn que T_0.

On remarque que si $u_0 \in \widetilde{H}_0$ et $u_l \in \widetilde{H}_l$ alors $(Tu_0, u_l) = (u_0, T^* u_l) = 0$ (car $\widetilde{H}_l$ est invariant par T^*), d'où $T(\widetilde{H}_0)$ est orthogonal à $\widetilde{H}_l$.

On peut représenter T par une matrice 3×3. Si $u = u_r + u_0 + u_l$ alors

$$Tu = Tu_r + T_0 u_0 + (I - P_0) T u_0 + T_l u_l + (I - P_l) T u_l$$

dans cette expression on a: $Tu_r \in \widetilde{H}_r$, $T_0 u_0 \in \widetilde{H}_0$, $(I - P_0) T u_0 \in \widetilde{H}_r$, $T_l u_l \in \widetilde{H}_l$ et $(I - P_l) T u_l \in \widetilde{H}_r \oplus \widetilde{H}_0$.

$$T = \begin{pmatrix} T_r & A & B \\ 0 & T_0 & C \\ 0 & 0 & T_l \end{pmatrix}.$$

où

$$\begin{aligned} Au_0 &= (I - P_0) T u_0 && \text{donc } A \in B(\widetilde{H}_0, \widetilde{H}_r), \\ Bu_l &= P_r (I - P_l) T u_l = P_r T u_l && \text{donc } B \in B(\widetilde{H}_l, \widetilde{H}_0), \\ Cu_l &= P_0 (I - P_l) T u_l = P_0 T u_l && \text{donc } C \in B(\widetilde{H}_l, \widetilde{H}_0). \end{aligned}$$

Remarque 4.4. $(T_r)^* = T_l^*$; $(T_l)^* = T_r^*$; $(T_0)^* = T_0^*$.

Montrons par exemple la dernière égalité. Soit $u \in \widetilde{H}_0$, $\forall v \in \widetilde{H}_0$ on a

$$(T_0^* u, v) = (P_0 T^* u, v) = (T^* u, v) = (u, Tv) = (u, P_0 T v) + (u, (I - P_0) T v)$$

or, $(I - P_0) T v \in \widetilde{H}_r \oplus \widetilde{H}_l = \widetilde{H}_0^\perp$ donc $(u, (I - P_0) T v) = 0$ et par conséquent

$$(T_0^* u, v) = (u, P_0 T v) = ((P_0 T_{\widetilde{H}_0})^* u, v) \quad \forall v \in \widetilde{H}_0$$

d'où $T_0^* = (T_0)^*$.

Proposition 4.5. *Soit* $T \in B(H)$ *alors:*

$$\operatorname{reg}(T) = \{\mu \in \rho_{q\phi}(T);\ N(\mu I - T) \subseteq \operatorname{clm}\{N(\lambda I - T)\}_{\lambda \neq \mu}\}.$$

Démonstration. Montrons l'inclusion suivante: $\{\mu \in \rho_{q\phi}(T);\ N(\mu I - T) \subseteq \operatorname{clm}\{N(\lambda I - T)\}_{\lambda \neq \mu}\} \subseteq \operatorname{reg}(T)$. Remarquons que $\forall \lambda \neq \mu$ on a $N(\lambda I - T) \subseteq \operatorname{Co}(\mu I - T)$, d'autre part $\mu \in \rho_{q\phi}(T) \Rightarrow \operatorname{Co}(\mu I - T)$ est fermé d'où $N(\mu I - T) \subseteq \operatorname{clm}\{N(\lambda I - T)\}_{\lambda \neq \mu} \subseteq \operatorname{Co}(\mu I - T)$ et par conséquent $\mu I - T$ est quasi-Fredholm de degré zéro ou encore $\mu \in \operatorname{reg}(T)$.

L'inclusion inverse se déduit du Théorème 1.1(iv).

Corollaire 4.6. $T \in B(H)$ *alors* $\rho^s_{q\phi}(T) \subseteq \sigma_p(T)$.

Démonstration. $\mu \in \rho^s_{q\phi}(T)$, par la proposition précédente on a $N(\mu I - T) \not\subseteq \operatorname{clm}\{N(\lambda I - T)\}_{\lambda \neq \mu}$ ce qui entraine que $N(\mu I - T) \neq \{0\}$.

Remarque 4.7. Si $\mu \in \operatorname{reg}(T)$ et G est un voisinage de μ alors

$$\operatorname{clm}\{N(\lambda I - T)\}_{\lambda \in G \setminus \mu} = \operatorname{clm}\{N(\lambda I - T)\}_{\lambda \in G}.$$

Ce résultat est une conséquense directe de la Proposition 4.5.

Lemme 4.8 (Kato [6, Lemme 3.3.1]). *Soit $T \in B(H)$ avec $R(T)$ fermé et Y un sous-espace fermé de H tel que $Y + N(T)$ soit fermé. Alors $R(T_Y)$ est fermé.*

On notera dans la suite

$$\rho_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda I - T) \text{ est surjective}\},$$
$$\rho_l(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda I - T) \text{ est injective à image fermé}\}.$$

Lemme 4.9. *Soit $\mu \in \rho_{q\phi}(T)$ et G un voisinage de μ. Si on pose $Y = \operatorname{clm}\{N(\lambda I - T)\}_{\lambda \in G \setminus \mu}$ alors $\mu \in \rho_r(T_Y)$.*

Démonstration. Soit $\mu \in \rho_{q\phi}(T)$ et (M, N) une décomposition de Kato associée à $\mu I - T$. On a d'une part $\forall \lambda \neq \mu$, $N(\lambda I - T) \subseteq \operatorname{Co}(\mu I - T) \subseteq M$ par conséquent $Y = \operatorname{clm}\{N((\lambda I - T)_M)\}_{\lambda \in G \setminus \mu}$. D'autre part, $N(\mu I - T) = N((\mu I - T)_M) \oplus N((\mu I - T)_N)$ avec $\mu \in \operatorname{reg}(T_M)$, d'aprés la Remarque 4.7 on a $Y = \operatorname{clm}\{N((\lambda I - T)_M)\}_{\lambda \in G \setminus \mu} = \operatorname{clm}\{N((\lambda I - T)_M)\}_{\lambda \in G}$. En outre, $\mu \in \operatorname{reg}(T) \Rightarrow R((\mu I - T)_M)$ est fermé et comme $N((\mu I - T)_M) \subseteq Y$ en utilisant le Lemme 4.8, on en déduit que $R((\mu I - T)_Y)$ est fermé. Par ailleurs on a $\forall \lambda \neq \mu$, $N(\lambda I - T) \subseteq R((\mu I - T)_Y)$, d'où $Y \subseteq R((\mu I - T)_Y)$ ou encore $\mu \in \rho_r(T_Y)$.

Théorème 4.10. *Soit $T \in B(H)$ alors on a:*

(i) $\rho_{q\phi}(T) \subseteq \rho_r(T_r) \cap \rho_l(T_l)$,
(ii) $\operatorname{reg}(T) \subseteq \rho(T_0)$,
(iii) $\operatorname{reg}(T) = \rho_r(T_r) \cap \rho_l(T_l) \cap \rho(T_0)$,
(iv) $\rho^s_{q\phi}(T) \subseteq \sigma^0_p(T_0) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda$ *est une valeur propre isolée de* $T_0\}$.

Démonstration. (i) en utilisant le Lemme 4.9 et la Remarque 4.4, on obtient:

$$\rho_{q\phi}(T) \subseteq \rho_r(T_r) \cap (\rho_r(T_r^*))^* = \rho_r(T_r) \cap \rho_l((T_r^*)^*) = \rho_r(T_r) \cap \rho_l(T_l).$$

(ii) D'après le Lemme 4.1, $\forall \mu \in \operatorname{reg}(T)$, $N(\mu I - T) \subseteq \widetilde{H}_r$ et $N(\mu I - T)^* \subseteq \widetilde{H}_l$. D'autre part $\widetilde{H}_0 = [\widetilde{H}_r + \widetilde{H}_l]^\perp = \widetilde{H}_r^\perp \cap \widetilde{H}_l^\perp$. Donc $\forall \mu \in \operatorname{reg}(T)$, $\mu I - T_0$ est injective à image dense dans $\widetilde{H}_0$. Il reste à montrer que $R(\mu I - T_0)$ est fermé. Pour cela remarquons que $(\mu I - T)(\widetilde{H}_0)$ est fermé; en effet, $R(\mu I - T)$ est fermé et $\widetilde{H}_0 \oplus N(\mu I - T)$ l'est aussi (comme somme orthogonale de deux fermés). Donc $(\mu I - T)(\widetilde{H}_0)$ est fermé (cf. le Lemme 4.8). Par ailleurs,

$$(\mu I - T)(\widetilde{H}_0) = P_0(\mu I - T)(\widetilde{H}_0) \oplus (I - P_0)(\mu I - T)(\widetilde{H}_0)$$

d'où on déduit que $P_0(\mu I - T)(\widetilde{H}_0)$ est fermé ou encore que $R(\mu I - T_0)$ est fermé. Par conséquent $\operatorname{reg}(T) \subseteq \rho(T_0)$.

(iii) $\operatorname{reg}(T) \subseteq \rho_r(T_r) \cap \rho_l(T_l) \cap \rho(T_0)$ se déduit de (i) et (ii). Pour l'inclusion inverse, remarquons que $\forall \lambda \in \rho_r(T_r) \cap \rho_l(T_l) \cap \rho(T_0)$, $N(\lambda I - T) = N(\lambda I_r - T_r)$ et comme $\lambda I_r - T_r$ est surjectif, on en déduit que $N(\lambda I - T) \subseteq \operatorname{Co}(\lambda I - T)$. Comme $c(\lambda I - T) = \min\{c(\lambda I_r - T_r), c(\lambda I_l - T_l), c(\lambda I_0 - T_0)\} > 0$ on voit que $R(\lambda I - T)$ est fermé $\forall \lambda \in \rho_r(T_r) \cap \rho_l(T_l) \cap \rho(T_0)$.

(iv) Soit $\mu \in \rho^s_{q\phi}(T)$. Supposons que μ n'est pas une valeur propre de T_0. Alors d'après la décomposition $H = \widetilde{H}_r \oplus \widetilde{H}_0 \oplus \widetilde{H}_l$ et (i) on voit que $N(\mu I_r - T) = N(\mu I - T_r) \subseteq \widetilde{H}_r = (\mu I - T)(\widetilde{H}_r)$ d'où $N(\mu I - T) \subseteq \operatorname{Co}(\mu I - T)$ ce qui implique que $\mu \in \operatorname{reg}(T)$ ce qui est contraire à l'hypothèse $\mu \in \rho^s_{q\phi}(T)$.

Donc $\mu \in \sigma_p(T_0)$ et la Proposition 3.1(i) entraîne que μ est isolé. Alors de (ii) on déduit que $\mu \in \sigma_p^0(T_0)$.

5. Séparation d'ensembles finis de points singuliers quasi-Fredholm

G. R. Allan [1, 2] a montré l'existence d'un inverse à droite (resp. à gauche) de $\lambda I - T$ analytique dans $\rho_r(T)$ (resp. $\rho_l(T)$). Les résultats de G. R. Allan et le Théorème 4.10(i) montrent qu'on peut trouver un inverse à droite de $\lambda I_r - T_r$, noté $R(\lambda)$, analytique dans $\rho_{q\phi}(T)$, et un inverse à gauche $L(\lambda)$ de $\lambda I_l - T_l$, analytique dans $\rho_{q\phi}(T)$.

On définit la fonction $F\colon \mathrm{reg}(T) \mapsto B(H)$, par la représentation matricielle relativement à la décomposition $H = \widetilde{H}_r \oplus \widetilde{H}_0 \oplus \widetilde{H}_l$,

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} R(\lambda) & R(\lambda)AR(\lambda, T_0) & R(\lambda)[AR(\lambda, T_0)C + B]L(\lambda) \\ 0 & R(\lambda, T_0) & R(\lambda, T_0)CL(\lambda) \\ 0 & 0 & L(\lambda) \end{pmatrix}$$

où $R(\lambda, T_0) = (\lambda I_0 - T_0)^{-1}$. Les résultats de [1, 2] et le Théorème 4.10 montrent que la fonction $F(\lambda)$ est analytique dans $\mathrm{reg}(T)$.

Soit σ une partie compacte de $\rho_{q\phi}^s(T)$ et Γ une courbe de Jordan fermée rectifiable dans $\mathrm{reg}(T)$ et entourant σ. On définit la projection spectrale généralisée associée à σ par:

$$P(\sigma) = (2i\pi)^{-1} \int_\Gamma F(\lambda)\, d\lambda$$

dont la représentation matricielle est la suivante:

$$P(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & (2i\pi)^{-1} \int_\Gamma R(\lambda)AR(\lambda, T_0)\, d\lambda & (2i\pi)^{-1} \int_\Gamma R(\lambda)AR(\lambda, T_0)CL(\lambda)\, d\lambda \\ 0 & P_0(\sigma) & (2i\pi)^{-1} \int_\Gamma R(\lambda, T_0)CL(\lambda)\, d\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $P_0(\sigma) = (2i\pi)^{-1} \int_\Gamma R(\lambda, T_0)\, d\lambda$.

$F(\lambda)$ et $P(\sigma)$ ont les propriétés suivantes (cf. [4] et le Théorème 4.10).

(a) $F(\lambda)$ est un résolvent généralisé de T analytique dans $\mathrm{reg}(T)$ (ne vérifiant pas en général l'identité de la résolvante),

(b) $P^2(\sigma) = P(\sigma)$.

(c) $P(\sigma)T = TP(\sigma)$.

(d) Soit T_σ la restriction de T au sous-espace invariant $P(\sigma)(H)$; alors $\sigma(T_\sigma) = \sigma$.

(e) Soit $P'(\sigma) = I - P(\sigma)$ et T'_σ la restriction de T au sous-espace invariant $P'(\sigma)(H)$ alors

$$\mathrm{reg}(T) \cup \sigma \subseteq \mathrm{reg}(T'_\sigma).$$

(f) Supposons que $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ avec $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing$ alors

$$P(\sigma_1)P(\sigma_2) = P(\sigma_2)P(\sigma_1) = 0, \quad P(\sigma) = P(\sigma_1) + P(\sigma_2).$$

Soit maintenant Σ l'ensemble des sous-ensembles finis de $\rho_{q\phi}^s(T)$ ordonné par inclusion. On vient de voir qu'à chaque $\sigma \in \Sigma$ on peut associer une projection spectrale généralisée $P(\sigma)$. D'après (f) il est clair que l'application $\sigma \mapsto P(\sigma)$ est un homomorphisme de treillis de Σ dans l'ensemble des projections sur H.

Le théorème suivant se déduit de ce qu'on vient de voir et du Théorème 4.10

Théorème 5.1. *Soit $T \in B(H)$, (avec les notations précédentes) on a:*

(i) *L'application $\sigma \mapsto P(\sigma)$ est un homomorphisme de treillis de Σ dans l'ensemble de projections sur H.*

(ii) *Si $H_\sigma = P(\sigma)(H)$ alors $\forall \sigma \in \Sigma$, H_σ est invariant par T.*

(iii) *Si on note T_σ la restriction de T à H_σ alors $\sigma(T_\sigma) = \sigma$.*

(iv) *Si T'_σ dénote la restriction de T à $H'_\sigma = (I - P(\sigma))(H)$ alors* $\mathrm{reg}(T) \cup \sigma \subseteq \mathrm{reg}(T'_\sigma)$.

REFERENCES

1. G. R. Allan, *On one-sided inverses in Banach algebras of holomorphic vector-valued functions*, J. London Math. Soc. **42** (1967), 463–470.
2. ——, *Holomorphic vector-valued functions on a domain of holomorphy*, J. London Math. Soc. **42** (1967), 509–513.
3. C. Apostol, *The reduced minimum modulus*, Michigan Math. J. **32** (1985), 279–294.
4. C. Apostol and K. Clancey, *Generalized inverses and spectral theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **215** (1976), 293–300.
5. ——, *On generalized resolvants*, Proc. Amer. Math. Soc. **58** (1976), 163–168.
6. T. Kato, *Perturbation theory for nullity, deficiency, and other quantities of linear operators*, J. Analyse Math. **6** (1958), 261–322.
7. J. Ph. Labrousse, *Les opérateurs quasi-Fredholm: une généralisation des opérateurs semi-Fredholm*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **29** (1980), 161–258.
8. M. Mbekhta, *Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux*, Thèse de 3ème cycle, Université de Nice, 1984.
9. ——, *Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux*, Glasgow Math. J. **29** (1987), 159–175.
10. ——, *Sur la théorie spectrale généralisée*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **306** (1988), 593–596.
11. ——, *Résolvant généralisé et théorie spectrale*, J. Operator Theory **21** (1989), 69–105.
12. P. Saphar, *Contribution à l'étude des applications linéaires dans un espace de Banach*, Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 363–384.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE, UNIVERSITÉ DE NICE, 06034 NICE CEDEX, FRANCE
E-mail address: blh@frmop11.bitnet

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE, UNIVERSITÉ DE LILLE I, 59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE